



## Modèle d'écoulement dans les CMCs

G. Perrot, Mario Ricchiuto, Gérard L. Vignoles

### ► To cite this version:

G. Perrot, Mario Ricchiuto, Gérard L. Vignoles. Modèle d'écoulement dans les CMCs. [Rapport de recherche] RR-8240, INRIA. 2013. hal-00790052

**HAL Id: hal-00790052**

**<https://inria.hal.science/hal-00790052>**

Submitted on 19 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Modèle d'écoulement dans les CMCs

G. Perrot , M. Ricchiuto, G.Vignoles

**RESEARCH  
REPORT**

**N° 8240**

February 2013

Project-Teams BACCHUS





## Modèle d'écoulement dans les CMCs

G. Perrot <sup>\*</sup>, M. Ricchiuto<sup>†</sup>, G.Vignoles<sup>\*</sup>

Project-Teams BACCHUS

Research Report n° 8240 — February 2013 — 17 pages

**Abstract:** We propose an asymptotic model for the incompressible flow of the oxide produced in cracks of self-healing ceramic matrix composites. The model is validated on simulations of drop spreading.

**Key-words:** asymptotic modeling, incompressible flow on reactive surfaces

---

<sup>\*</sup> Laboratoire des Composites ThermoStructuraux (UMR 5801 LCTS)

<sup>†</sup> Inria Bordeaux - Sud-Ouest, Team BACCHUS

**RESEARCH CENTRE  
BORDEAUX – SUD-OUEST**

351, Cours de la Libération  
Bâtiment A 29  
33405 Talence Cedex

## Modèle d'écoulement dans les CMCs

**Résumé :** On propose un modèle asymptotique pour l'écoulement incompressible de l'oxyde produit dans les fissures de composites à matrice céramique auto-cicatrisants. Le modèle est validé par de simulations d'étalement de gouttes.

**Mots-clés :** modèle asymptotique, écoulement incompressible sur surfaces réactives

## Contents

<b>1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>3</b>
1.1	Description . . . . .	3
1.2	Equations du modèle . . . . .	3
1.3	Conditions aux limites . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Développement du modèle</b>	<b>5</b>
2.1	Adimensionnement des équations . . . . .	5
2.2	Traitement des conditions aux bords . . . . .	6
2.2.1	Condition au bord libre $z = h(t, x)$ . . . . .	6
2.2.2	Conditions au fond $z = b(t, x)$ . . . . .	6
2.3	Intégration des équations . . . . .	7
2.3.1	Equation pour $\varphi$ . . . . .	7
2.3.2	Equation de la pression . . . . .	8
2.3.3	Equation sur la vitesse . . . . .	9
2.3.4	Récapitulation des équations . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Validation numérique</b>	<b>11</b>
3.1	Traitement de la variation du fond . . . . .	12
3.2	Schéma pour le système $(\delta, \delta u)$ . . . . .	12
3.3	Mise à jour des variables . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Résultats</b>	<b>14</b>

## 1 Présentation du problème

### 1.1 Description

On considère un fluide de hauteur  $h(t, x)$  évoluant sur un fond  $b(t, x)$ . L'épaisseur du fluide est notée  $\delta(t, x) = h(t, x) - b(t, x)$ . Le fond est composé de zones inertes  $\phi_i$  et de zones réactives  $\phi_r$  génératrices de fluide.

Le but est de développer un modèle 1D pour l'écoulement du fluide en prenant en compte des paramètres physico-chimiques tels que : tension de surface, injection de fluide via le fond, recul de surface dans la partie rÃ©active, et angle de mouillage. La figure 1 montre les différents paramètres qui seront utilisés dans le modèle.

On note  $\vec{u}(t, x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ w(t, x) \end{pmatrix}$  la vitesse du fluide en un point  $x$  donné, les normales pour le fond  $b$  et la surface libre  $h$  sont respectivement :  $\hat{n}_b = \begin{pmatrix} -\partial_x b \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\hat{n}_h = \begin{pmatrix} -\partial_x h \\ 1 \end{pmatrix}$ , et  $\varphi$  représente l'indicateur de phase défini par  $\varphi(t, x, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [b(t, x), h(t, x)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

### 1.2 Equations du modèle

Le système d'équations pour ce modèle est inspiré des modèles développées par [GP00, Mar07].

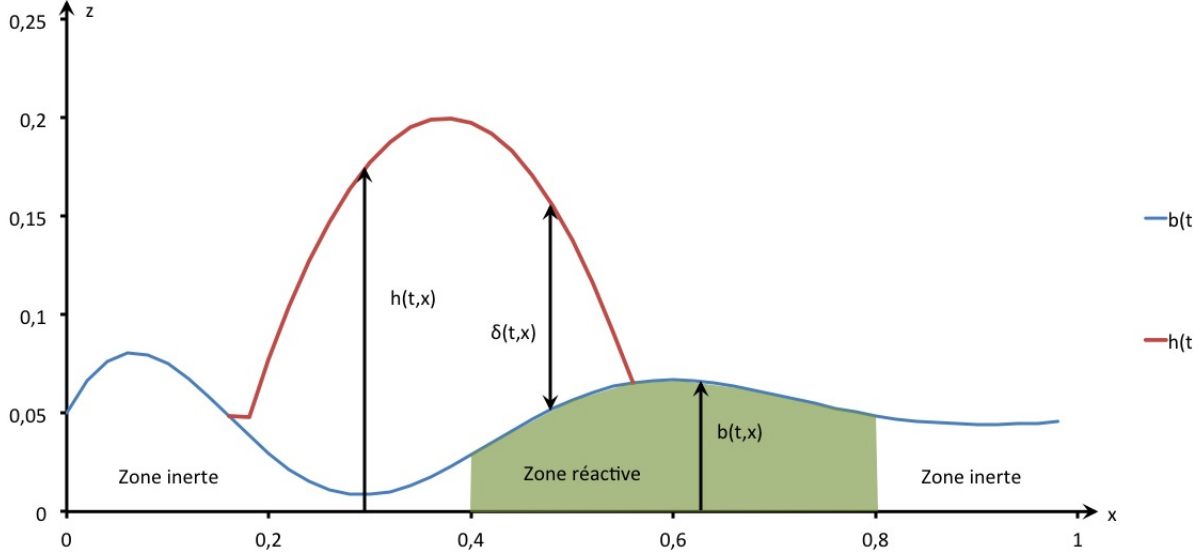


Figure 1: Représentation schématique d'une goutte (rouge) posée sur un fond irrégulier (bleu) comportant une phase réactive

L'équation sur l'indicateur de phase est écrite en prenant en compte le phénomène d'injection de fluide sur la partie réactive  $\phi_r$  :

$$\partial_t \varphi + \nabla \cdot (\vec{u} \varphi) = \phi_r \vec{v}_\chi \cdot \nabla \varphi \quad (1)$$

Avec  $\vec{v}_\chi = \vec{v}_{inj} - \vec{v}_{rec}$  la différence entre  $\vec{v}_{inj}$  la vitesse d'injection de fluide et  $\vec{v}_{rec}$  la vitesse de recul de la surface sur la phase réactive.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

L'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t u + \partial_x u^2 + \partial_z(uw) + \partial_x p = \partial_x \sigma_{xx} + \partial_z \sigma_{xz} \quad (3)$$

$$\partial_t w + \partial_x(uw) + \partial_z w^2 + \partial_z p = -g + \partial_x \sigma_{xz} + \partial_z \sigma_{zz} \quad (4)$$

Avec  $p$  la pression du fluide,  $g$  l'accélération gravitationnelle et  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{zz}$  les composantes du tenseur des contraintes défini par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2\nu \partial_x u & \nu(\partial_z u + \partial_x w) \\ \nu(\partial_z u + \partial_x w) & 2\nu \partial_z w \end{pmatrix}$$

### 1.3 Conditions aux limites

Dans ce modèle, les conditions aux limites vont faire apparaitre les différents phénomènes que l'on veut prendre en compte :

- La tension de surface, qui s'écrit pour  $z = h(t, x)$  [Mar07] :

$$(-p \text{Id} + \sigma) \cdot \hat{n}_h = \beta \kappa \hat{n}_h \quad (5)$$

avec  $\beta$  le coefficient de capillarité et  $\kappa$  la courbure moyenne de la surface du fluide

- Le recul de la surface décrit par :

$$\partial_t b = \phi_r \vec{v}_{rec} \cdot \hat{n}_b \quad (6)$$

- La condition au bord  $b(t, x)$  comporte les termes d'injection de liquide et de description du mouvement de la ligne de contact [GL09] entre le liquide et la surface par l'ajout dans l'équation d'un terme appelé "*uncompensated Young stress*" dans [QWS06] :

$$(\sigma \cdot \hat{n}_b) \cdot \hat{t}_b - k \|\hat{t}_b\| \vec{u} \cdot \hat{t}_b + \beta (\hat{t}_h \cdot \hat{t}_b - \cos \theta) \|\hat{t}_b\| = 0 \quad (7)$$

avec  $\hat{t}_b, \hat{t}_n$  les vecteurs tangents  $\tilde{A} \quad b(t, x)$  et  $h(t, x)$ ,  $k$  le coefficient de friction entre le fluide et le fond et  $\theta$  l'angle de contact statique.

Finalement les conditions aux limites pour ce problème peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{En } z = h(t, x) : \\ \quad (-p \text{Id} + \sigma) \cdot \hat{n}_h = \beta \kappa \hat{n}_h \\ \text{En } z = b(t, x) : \\ \quad \partial_t b = \phi_r \vec{v}_{rec} \cdot \hat{n}_b \\ \quad (\sigma \cdot \hat{n}_b) \cdot \hat{t}_b - k \|\hat{t}_b\| \vec{u} \cdot \hat{t}_b + \beta (\hat{t}_h \cdot \hat{t}_b - \cos \theta) \|\hat{t}_b\| = 0 \end{array} \right.$$

## 2 Développement du modèle

### 2.1 Adimensionnement des équations

Afin de faire apparaître les ordres de grandeur de chaque terme, les équations et conditions aux limites sont mises sous une forme non dimensionnelle en utilisant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{H}{L} = \frac{W}{U} & T &= \frac{L}{U} & P &= U^2 & Fr^2 &= \frac{U^2}{gH} \\ G &= \frac{1}{Fr^2} & Re &= \frac{UL}{\nu} & \alpha &= \frac{k}{U} & \tau &= \frac{\beta \kappa}{U^2} \end{aligned}$$

Les équations et conditions aux limites définies précédemment peuvent être réécrites en faisant apparaître les grandeurs caractéristiques.

$$\partial_t \varphi + \nabla \cdot (\vec{u} \varphi) = \phi_r \vec{v}_\chi \cdot \nabla \varphi \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (9)$$



$$\partial_t u + \partial_x u^2 + \partial_z(uw) + \partial_x p = \frac{1}{Re} \partial_x \sigma_{xx} + \frac{1}{\varepsilon Re} \partial_z \sigma_{xz} \quad (10)$$

$$\partial_t w + \partial_x(uw) + \partial_z w^2 + \partial_z p = -G + \frac{\varepsilon}{Re} \partial_x \sigma_{xz} + \frac{1}{Re} \partial_z \sigma_{zz} \quad (11)$$

avec :  $\sigma_{xx} = 2 \partial_x u$ ,  $\sigma_{zz} = 2 \partial_z w$  et  $\sigma_{xz} = \frac{1}{\varepsilon} \partial_z u + \varepsilon \partial_x w$

## 2.2 Traitement des conditions aux bords

### 2.2.1 Condition au bord libre $z = h(t, x)$

La condition sur le bord libre prend en compte l'effet de tension de surface :

$$(-p \text{Id} + \sigma) \cdot \hat{n}_h = \beta \kappa \hat{n}_h$$

On  $\tilde{A} \otimes \text{crit}$  cette relation sur chaque composante :

$$\begin{cases} -(-p + \sigma_{xx}) \partial_x h + \sigma_{xz} = -\beta \kappa \partial_x h \\ -\sigma_{xz} \partial_x h - p + \sigma_{zz} = \beta \kappa \end{cases}$$

On remplace le terme  $\sigma_{xz}$  de la seconde équation par la première ligne.

$$\begin{cases} -(-p + \sigma_{xx}) \partial_x h + \sigma_{xz} = -\beta \kappa \partial_x h \\ -p (1 - (\partial_x h)^2) + \sigma_{zz} - \sigma_{xx} (\partial_x h)^2 = \beta \kappa (1 - (\partial_x h)^2) \end{cases}$$

On met les équations ci-dessus sous forme non dimensionnelle, on obtient :

$$\begin{cases} -\varepsilon(-p + \frac{1}{Re} \sigma_{xx}) \partial_x h + \frac{1}{Re} \left( \varepsilon \partial_x w + \frac{1}{\varepsilon} \partial_z u \right) = -\varepsilon \tau \partial_x h \\ -p (1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2) + \frac{1}{Re} \sigma_{zz} - \frac{\varepsilon^2}{Re} \sigma_{xx} (\partial_x h)^2 = \tau (1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2) \end{cases}$$

On se place à l'ordre 2 pour obtenir les relations finales en  $z = h(t, x)$  :

$$\frac{1}{Re} \partial_z u = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{en } z = h(t, x) \quad (12)$$

$$p = \frac{2}{Re} \partial_z w - \tau + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{en } z = h(t, x) \quad (13)$$

### 2.2.2 Conditions au fond $z = b(t, x)$

La première condition pour  $z = b(t, x)$  concerne le recul de la surface réactive suivant une vitesse de recul donnée  $\vec{v}_{rec} = f\left(\frac{1}{\delta(t, x)}\right)$ . Sous forme non dimensionnelle, cette condition s'écrit :

$$\partial_t b = -\phi_r u_{rec} \partial_x b + \phi_r w_{rec} \quad \text{en } z = b(t, x) \quad (14)$$

La seconde condition fait apparaître le glissement du fluide sur la surface ainsi que l'angle avec le fond.

$$(\sigma \cdot \hat{n}_b) \cdot \hat{t}_b - k \|\hat{t}_b\| (\vec{u} + \phi_r \vec{u}_{rec}) \cdot \hat{t}_b + \beta (\hat{t}_h \cdot \hat{t}_b - \cos \theta) = 0$$

Soit en développant :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_x b \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x b \end{pmatrix} - k \sqrt{1 + (\partial_x b)^2} \begin{pmatrix} u + \phi_r u_{rec} \\ w + \phi_r w_{rec} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x b \end{pmatrix} \\ + \beta \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x b \end{pmatrix} - \cos \theta \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sigma_{xx} \partial_x b + \sigma_{xz} - \sigma_{xz} (\partial_x b)^2 + \sigma_{zz} \partial_x b - k(u + \phi_r u_{rec} - (w + \phi_r w_{rec}) \partial_x b) \sqrt{1 + (\partial_x b)^2} \\ + \beta (1 + \partial_x h \partial_x b - \cos \theta) = 0$$

On passe sous forme non dimensionnelle :

$$\frac{\varepsilon}{Re} (-\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \partial_x b + \frac{1}{Re} (1 - \varepsilon^2 (\partial_x b)^2) \sigma_{xz} - \alpha (u + \phi_r u_{rec} - \varepsilon^2 (w + \phi_r w_{rec}) \partial_x b) \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x b)^2} \\ + \gamma (1 + \varepsilon^2 \partial_x h \partial_x b - \cos \theta) = 0$$

$$\text{où } \gamma = \frac{\beta}{U}$$

On se place à l'ordre 2. On trouve en repassant sous forme dimensionnelle :

$$k(u + \phi_r u_{rec}) + \beta(1 - \cos \theta) = (-\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \partial_x b + \sigma_{xz}$$

Or l'équation de continuité (9) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \partial_x u + \partial_z w &= 0 \Leftrightarrow 2\nu \partial_x u + 2\nu \partial_z w = 0 \\ &\Leftrightarrow \sigma_{xx} = -\sigma_{zz} \end{aligned}$$

D'où

$$k(u + \phi_r u_{rec}) + \beta(1 - \cos \theta) = -2\sigma_{xx} \partial_x b + \sigma_{xz} \quad \text{en } z = b(t, x) \quad (15)$$

## 2.3 Intégration des équations

A présent que les conditions aux limites ont été traité, on va intégrer les différentes équations sur la hauteur de fluide  $h(t, x)$ .

### 2.3.1 Equation pour $\varphi$

Dans un premier temps on va intégrer l'équation (8) entre  $-\infty$  et  $+\infty$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t \varphi + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x u \varphi + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_z w \varphi = \phi_r \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}_\chi \nabla \varphi$$

Or la réaction chimique ayant lieu sur le fond  $b(t, x)$ , l'intégrale du dernier terme devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}_\chi \nabla \varphi = \lim_{dh \rightarrow 0} \int_{b-dh}^{b+dh} \vec{v}_\chi \nabla \varphi + 0 = \vec{v}_\chi \cdot \hat{n}_b$$

L'équation devient donc :

$$\partial_t \delta + \partial_x(\delta u) + 0 = \phi_r \vec{v}_\chi \cdot \hat{n}_b$$

D'où:

$$\partial_t \delta + \partial_x(\delta u) = -\phi_r u_\chi \partial_x b + \phi_r w_\chi \quad (16)$$

A présent, on intègre l'équation (8) entre  $b$  et  $h$  :

$$\int_b^h \partial_t \varphi + \int_b^h \partial_x u \varphi + \int_b^h \partial_z w \varphi = \phi_r \int_b^h \vec{v}_\chi \nabla \varphi$$

Comme précédemment :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}_\chi \nabla \varphi = \vec{v}_\chi \cdot \hat{n}_b$ , donc :

$$\partial_t \delta - (\partial_t h - \partial_t b) + \partial_x(\delta u) - (u|_h \partial_x h - u|_b \partial_x b) + w|_h - w|_b = \phi_r \vec{v}_\chi \cdot \hat{n}_b$$

Or d'après l'équation (16), on peut écrire :

$$-(\partial_t h - \partial_t b) - (u|_h \partial_x h - u|_b \partial_x b) + w|_h - w|_b = 0$$

On en déduit les relations suivantes :

$$w|_h = \partial_t h + u|_h \partial_x h \quad (17)$$

$$w|_b = \partial_t b + u|_b \partial_x b \quad (18)$$

### 2.3.2 Equation de la pression

On intègre maintenant l'équation (11), projection de l'équation de Navier-Stokes sur l'axe  $z$ . On écrit donc l'équation :

$$\partial_z p = -G + \frac{1}{Re} (\partial_x \partial_z u + \varepsilon^2 \partial_{xx} w) + \frac{2}{Re} \partial_{zz} w - \varepsilon^2 (\partial_t w + \partial_x(uw) + \partial_z w^2)$$

A l'ordre 2, on a

$$\partial_z p = -G + \frac{1}{Re} \partial_x \partial_z u + \frac{2}{Re} \partial_{zz} w + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$\partial_z p = -G + \partial_z \left( \frac{1}{Re} \partial_x u + \frac{2}{Re} \partial_z w \right) \quad (19)$$

En intégrant cette équation entre  $h$  et  $z$ , on a :

$$\int_h^z \partial_z p = - \int_h^z G + \int_h^z \partial_z \left( \frac{1}{Re} \partial_x u + \frac{2}{Re} \partial_z w \right)$$

$$p - p|_h = G(h - z) + \frac{1}{Re} (\partial_x u + 2\partial_z w) - (\partial_x u + 2\partial_z w)|_h$$

Grace à l'équation de continuité(9), on peut écrire

$$\partial_x u + \partial_z w = 0$$

On utilise cette relation dans l'équation de la pression :

$$p - p|_h = G(h - z) - \frac{1}{Re} \partial_x u - \frac{1}{Re} \partial_x u|_h - \frac{2}{Re} \partial_z w|_h$$

A présent, on se sert de la condition au bord  $z = h(t, x)$  (12) pour simplifier notre équation, il reste donc :

$$p = G(h - z) - \frac{1}{Re} \partial_x u - \frac{1}{Re} \partial_x u|_h - \tau \quad (20)$$

En considérant la relation (13), on peut écrire :

$$p = G(h - z) - \frac{1}{Re} \partial_x \bar{u} - \frac{1}{Re} \partial_x \bar{u} - \tau$$

Finalement

$$p = G(h - z) - \frac{1}{Re} \sigma_{xx} - \tau \quad (21)$$

### 2.3.3 Equation sur la vitesse

Afin de traiter l'intégration de l'équation (10), on revient à des variables dimensionnelles, ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u^2 + \partial_z(uw) + \partial_x p = \partial_x \sigma_{xx} + \partial_z \sigma_{xz} \\ -(-p|_h + \sigma_{xx}|_h) \partial_x h + \sigma_{xz}|_h = -\beta \kappa \partial_x h \\ k(u|_b + \phi_r u_{rec}|_b) + \beta(1 - \cos \theta) = -2\sigma_{xx}|_b \partial_x b + \sigma_{xz}|_b \\ p = g(h - z) - \sigma_{xx} - \beta \kappa \\ w|_h = \partial_t h + u|_h \partial_x h \\ w|_b = \partial_t b + u|_b \partial_x b \end{cases} \quad (22)$$

On intègre maintenant la composante sur  $x$  de l'équation de Navier-Stokes :

$$\int_b^h \partial_t u + \int_b^h \partial_x u^2 + \int_b^h \partial_z(uw) + \int_b^h \partial_x p = \int_b^h \partial_x \sigma_{xx} + \int_b^h \partial_z \sigma_{xz}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \partial_t(\delta u) - (u|_h \partial_t h - u|_b \partial_t b) + \partial_x(\delta u^2) - (u|_h^2 \partial_x h - u|_b^2 \partial_x b) + u|_h w|_h - u|_b w|_b = \\ & - \partial_x \int_b^h p + (p|_h \partial_x h - p|_b \partial_x b) + \partial_x(\delta \sigma_{xx}) - (\sigma_{xx}|_h \partial_x h - \sigma_{xx}|_b \partial_x b) + \sigma_{xz}|_h - \sigma_{xz}|_b \end{aligned}$$

En regroupant certains termes, on peut faire apparaître les relations définies précédemment :

$$\begin{aligned} \partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) - u_{|_h}(\partial_t h + u_{|_h} \partial_x h - w_{|_h}) + u_{|_b}(\partial_t b + u_{|_b} \partial_x b - w_{|_b}) = \\ - \partial_x \int_b^h p + \partial_x(\delta \sigma_{xx}) - (-p_{|_h} \partial_x h + \sigma_{xx|_h} \partial_x h) + \sigma_{xz|_h} + \sigma_{xx|_b} \partial_x b - \sigma_{xz|_b} - p_{|_b} \partial_x b \end{aligned}$$

Les relations (22) permettent de simplifier l'équation :

$$\partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) = - \partial_x \int_b^h p + \partial_x(\delta \sigma_{xx}) - (-p_{|_h} \partial_x h + \sigma_{xx|_h} \partial_x h) + \sigma_{xz|_h} + \sigma_{xx|_b} \partial_x b - \sigma_{xz|_b} - p_{|_b} \partial_x b$$

$$\partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) = - \partial_x \int_b^h p + \partial_x(\delta \sigma_{xx}) - \beta \kappa \partial_x h + \sigma_{xx|_b} \partial_x b - \sigma_{xz|_b} - p_{|_b} \partial_x b$$

$$\partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) = - \partial_x \int_b^h p + \partial_x(\delta \sigma_{xx}) - \beta \kappa \partial_x h - k(u_{|_b} + \phi_r u_{rec|_b}) - \beta(1 - \cos \theta) - \sigma_{xx|_b} \partial_x b - p_{|_b} \partial_x b$$

Or  $p = g(h - z) - \sigma_{xx} - \beta \kappa$ , donc en  $z = b(t, x)$  :

$$p_{|_b} = g\delta - \sigma_{xx|_b} - \beta \kappa$$

En multipliant la relation par  $\partial_x b$ , on a :

$$-p_{|_b} \partial_x b - \sigma_{xx|_b} \partial_x b = -g\delta \partial_x b + \beta \kappa \partial_x b$$

D'où en remplaçant dans l'équation :

$$\partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) = - \partial_x \int_b^h p + \partial_x(\delta \sigma_{xx}) - \beta \kappa \partial_x h - k(u_{|_b} + \phi_r u_{rec|_b}) - \beta(1 - \cos \theta) - g\delta \partial_x b + \beta \kappa \partial_x b$$

$$\partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) + \beta \kappa \partial_x \delta = - \partial_x \int_b^h p + \partial_x(\delta \sigma_{xx}) - k(u_{|_b} + \phi_r u_{rec|_b}) - \beta(1 - \cos \theta) - g\delta \partial_x b$$

Le terme sur la pression peut être intégré :

$$\partial_x \int_b^h p = g\partial_x \left( \frac{\delta^2}{2} \right) - \partial_x(\delta \sigma_{xx}) - \partial_x(\delta \beta \kappa)$$

L'équation sur la vitesse s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) + \beta \kappa \partial_x \delta = - \left( g\partial_x \left( \frac{\delta^2}{2} \right) - \partial_x(\delta \sigma_{xx}) - \partial_x(\delta \beta \kappa) \right) + \partial_x(\delta \sigma_{xx}) \\ - k(u_{|_b} + \phi_r u_{rec|_b}) - \beta(1 - \cos \theta) - g\delta \partial_x b \end{aligned}$$

soit :

$$\partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) + g\partial_x\left(\frac{\delta^2}{2}\right) + g\delta\partial_x b - \beta\delta\partial_x\kappa + k(u|_b + \phi_r u_{rec}|_b) + \beta(1 - \cos\theta) = 2\partial_x(\delta\sigma_{xx})$$

Or la courbure  $\kappa$  peut s'écrire sous la forme :

$$\kappa = \frac{\partial_{xx}h}{\sqrt{1 + (\partial_x h^2)^3}} = \partial_{xxx}h + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

La forme finale de l'équation sur la vitesse est :

$$\partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) + g\partial_x\left(\frac{\delta^2}{2}\right) + g\delta\partial_x b - \beta\delta\partial_{xxx}h + k(u + \phi_r u_{rec}) + \beta(1 - \cos\theta) = \partial_x(4\nu\delta\partial_x u) \quad (23)$$

### 2.3.4 Récapitulation des équations

Les équations à résoudre pour modéliser ce problème composent le système suivant

$$\partial_t\delta + \partial_x(\delta u) = -\phi_r u_\chi \partial_x b + \phi_r w_\chi \quad (24)$$

$$\partial_t b = -\phi_r u_{rec} \partial_x b + \phi_r w_{rec} \quad (25)$$

$$\partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) + g\partial_x\left(\frac{\delta^2}{2}\right) + g\delta\partial_x b - \beta\delta\partial_{xxx}h + k(u + \phi_r u_{rec}) + \beta(1 - \cos\theta) = \partial_x(4\nu\delta\partial_x u) \quad (26)$$

## 3 Validation numérique

On repart des équations précédentes et on en négligeant les termes liés à la gravité qui ne joue pas un rôle important dans les applications envisagées.

$$\begin{cases} \partial_t b = -\phi_r u_{rec} \partial_x b + \phi_r w_{rec} \\ \partial_t\delta + \partial_x(\delta u) = -\phi_r u_\chi \partial_x b + \phi_r w_\chi \\ \partial_t(\delta u) + \partial_x(\delta u^2) - \beta\delta\partial_{xxx}h + k(u + \phi_r u_{rec}) + \beta(1 - \cos\theta) = \partial_x(4\nu\delta\partial_x u) \end{cases}$$

On cherche maintenant à discrétiser ce système, en résolvant d'une part l'équation sur le fond  $b(t, x)$ , et d'autre part les équations du système  $\begin{pmatrix} \delta \\ \delta u \end{pmatrix}$

Les vitesses  $u_\chi$ ,  $w_\chi$ ,  $u_{rec}$  et  $w_{rec}$  liées à la chimie sont de la forme suivante :

$$v(t, x) = V k(t, x)$$

Avec  $\frac{1}{k(t, x)} = \frac{1}{k_r} + \frac{h(t, x)}{\mathcal{D}_{O_2}}$ , où  $\mathcal{D}_{O_2}$  est le coefficient de diffusion de l'oxygène dans le liquide.

### 3.1 Traitement de la variation du fond

L'équation de la variation du fond est résolue par un schéma centré :

$$\begin{aligned} \frac{b_i^{n+1} - b_i^n}{\Delta t} &= -\phi_{r,i} u_{rec,i}^n \frac{b_{i+1}^n - b_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \phi_{r,i} w_{rec,i}^n \\ b_i^{n+1} &= b_i^n - \phi_{r,i} u_{rec,i}^n \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (b_{i+1}^n - b_{i-1}^n) + \phi_{r,i} \Delta t w_{rec,i}^n \end{aligned} \quad (27)$$

### 3.2 Schéma pour le système $(\delta, \delta u)$

Les équations sur  $\delta$  et  $\delta u$  peuvent être réécrites pour faire apparaître les dérivées en temps et en espace des variables :

$$\begin{cases} \partial_t \delta + \partial_x (\delta u) = -\phi_r u_\chi \partial_x b + \phi_r w_\chi \\ \partial_t (\delta u) + \partial_x (\delta u^2 - 4\nu \delta \partial_x u) = \beta \delta \partial_{xx} h - k(u + \phi_r u_{rec}) - \beta(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

Elles sont approchées numériquement comme suit:

$$\begin{cases} \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} + \frac{(\delta u)_{i+\frac{1}{2}}^n - (\delta u)_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = -\phi_{r,i} u_{\chi,i} \frac{b_{i+1}^n - b_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \phi_{r,i} w_{\chi,i} \\ \frac{(\delta u)_i^{n+1} - (\delta u)_i^n}{\Delta t} - \frac{F c_{i+\frac{1}{2}}^n - F c_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + D_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i-\frac{1}{2}}^n = S_i^n \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{aligned} F c_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{\delta_{i+1}^n u_{i+1}^{n2} + \delta_i^n u_i^{n2}}{2} - 4\nu \frac{(\delta_{i+1}^n + \delta_i^n)(u_{i+1}^n - u_i^n)}{2 \Delta x} \\ F c_{i-\frac{1}{2}}^n &= \frac{\delta_i^n u_i^{n2} + \delta_{i-1}^n u_{i-1}^{n2}}{2} - 4\nu \frac{(\delta_i^n + \delta_{i-1}^n)(u_i^n - u_{i-1}^n)}{2 \Delta x} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} F c_{i+\frac{1}{2}}^n \\ F c_{i-\frac{1}{2}}^n \end{aligned}} \right\} \text{Le flux centré évalué en } i+\frac{1}{2} \text{ et } i-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} D_{i+\frac{1}{2}}^n &= \left( \frac{|u_{i+1}^n + u_i^n|}{2} + \Delta x \right) \frac{(\delta_{i+1}^n u_{i+1}^n - \delta_i^n u_i^n)}{2 \Delta x} \\ D_{i-\frac{1}{2}}^n &= \left( \frac{|u_i^n + u_{i-1}^n|}{2} + \Delta x \right) \frac{(\delta_i^n u_i^n - \delta_{i-1}^n u_{i-1}^n)}{2 \Delta x} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} D_{i+\frac{1}{2}}^n \\ D_{i-\frac{1}{2}}^n \end{aligned}} \right\} \text{Les termes de décentrement}$$

Et le terme source :

$$\begin{aligned} S_i^n &= \beta \frac{\delta_{i+1}^n + \delta_i^n}{\Delta x} \frac{h_{i+2}^n - 3h_{i+1}^n + 3h_i^n - h_{i-1}^n}{4 \Delta x} + \beta \frac{\delta_i^n + \delta_{i-1}^n}{\Delta x} \frac{h_{i+1}^n - 3h_i^n + 3h_{i-1}^n - h_{i-2}^n}{4 \Delta x} \\ &\quad + \beta(1 - \cos \theta) - k(u_i^n + \phi_{r,i} u_{rec,i}) \end{aligned}$$

### 3.3 Mise à jour des variables

Les nouvelles valeurs sont données par les relations suivantes

$$\begin{cases} \delta_i^{n+1} = \delta_i^n - \Delta t \frac{\delta_{i+1}^n u_{i+1}^n - \delta_{i-1}^n u_{i-1}^n}{2 \Delta x} - \phi_{r,i} \Delta t u_{\chi,i} \frac{b_{i+1}^n - b_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \phi_{r,i} \Delta t w_{\chi,i} \\ (\delta u)_i^{n+1} = (\delta u)_i^n + \Delta t \frac{F c_{i+\frac{1}{2}}^n - F c_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} - \Delta t \left( D_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \Delta t S_i^n \end{cases}$$

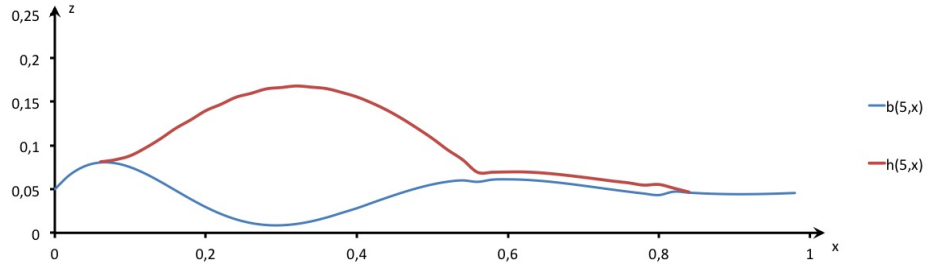
Le calcul de la vitesse  $u$  s'effectue grace à la relation :

$$u_i^{n+1} = \frac{\sqrt{2} \delta_i^{n+1} (\delta u)_i^{n+1}}{\sqrt{(\delta_i^{n+1})^4 + \max(\Delta x^2, (\delta_i^{n+1})^4)}}$$



## 4 Résultats

On teste le code pour le cas d'une bulle de liquide posée sur un fond non régulier comprenant une partie réactive (figure 1), la figure ci-dessous représente le début de la réaction :



On peut regarder les valeurs de la vitesse du fluide pour différentes itérations :

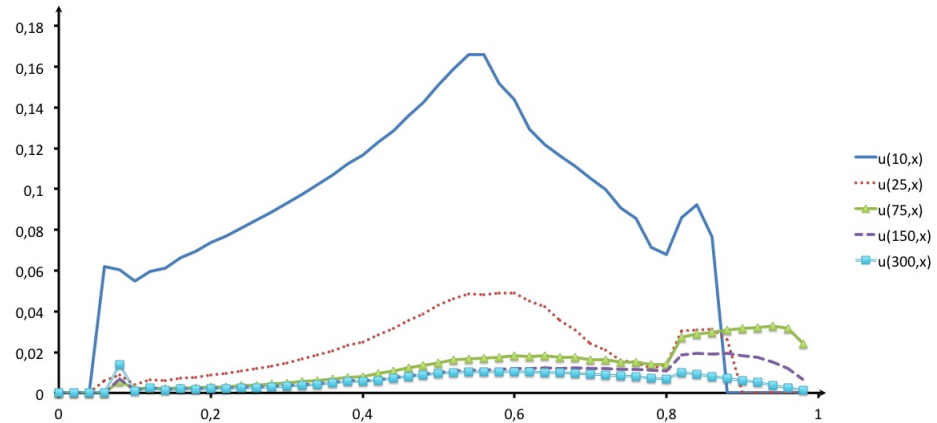


Figure 2: Evolution de la vitesse du fluide au cours du temps

La vitesse diminue rapidement, ce qui signifie que la bulle s'étale d'abord rapidement puis ralentit à cause de l'effet de la tension de surface qui diminue, l'injection de liquide d'abord importante, puis de plus en plus faible tire la bulle initiale vers la droite, ce qui est représenté par le pic sur la courbe pour  $t = 10$

On obtient les résultats suivants pour différents temps, la réaction chimique étant arrêtée à  $t = 100$ , afin de pouvoir observer uniquement l'effet de la tension de surface :

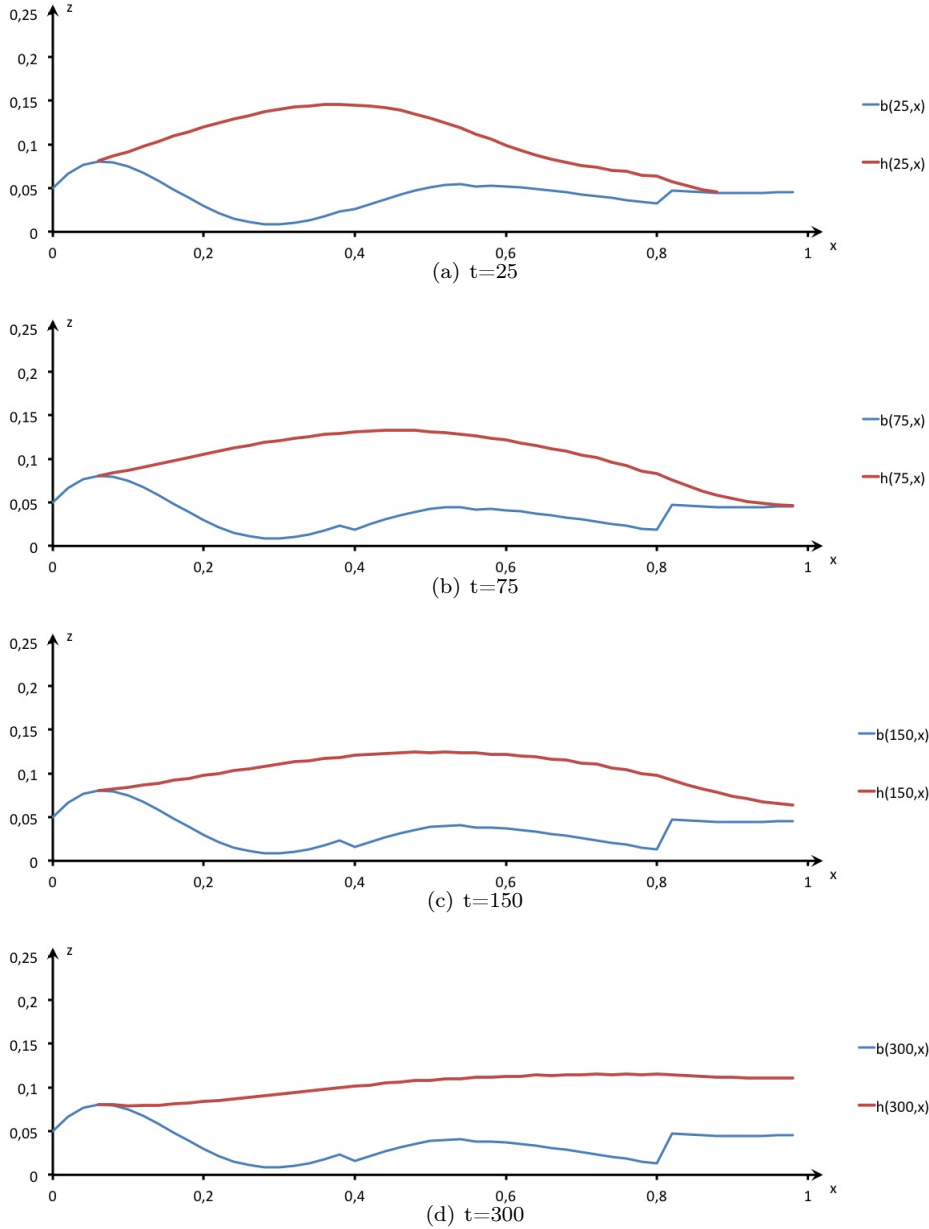


Figure 3: Evolution de la hauteur de fluide au cours du temps

Le recul de la surface est proportionnel à l'inverse de la hauteur de fluide, ce qui se justifie par une plus grande difficulté pour l'oxygène d'atteindre le fond, et de réagir avec le solide. La quantité de fluide augmente au cours du temps, grâce à l'injection de matière par la partie réactive, et on constate que le fluide s'écoule lentement vers la droite de l'image jusqu'à arriver à un état où la surface du fluide est quasi plane.

## References

- [GL09] J.F. Gerbeau and T. Lelièvre, *Generalized Navier boundary condition and geometric conservation law for surface tension*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **198** (2009), no. 5-8, 644–656.
- [GP00] J.F. Gerbeau and B. Perthame, *Derivation of viscous saint-venant system for laminar shallow water; numerical validation*, Rapport INRIA (2000), no. 4084.
- [Mar07] F. Marche, *Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects*, European Journal of Mechanics B/Fluids **26** (2007), 49–63.
- [QWS06] T.Z. Quian, X.P. Wang, and P. Shen, *Molecular hydrodynamics of the moving contact line in two-phase immiscible flows*, Commun. Comput. Phys. **1** (2006), no. 1, 1–52.



**RESEARCH CENTRE  
BORDEAUX – SUD-OUEST**

351, Cours de la Libération  
Bâtiment A 29  
33405 Talence Cedex

Publisher  
Inria  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
[inria.fr](http://inria.fr)

ISSN 0249-6399